

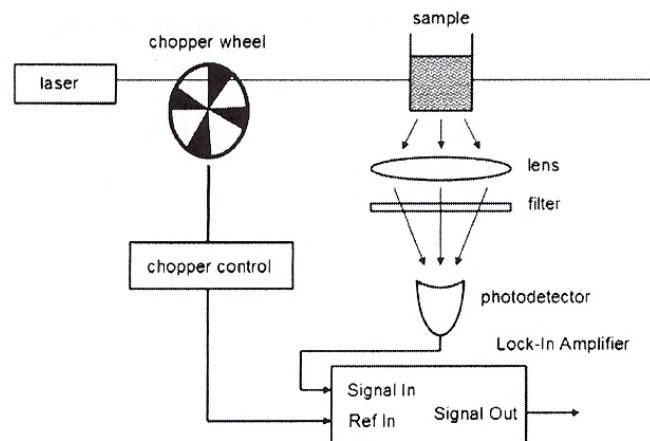
Temaøvelse: Lock-in forstærkere og støj

Udstyr:

- Funktionsgenerator
- EG&G 5210 lock-in forstærker
- Diverse testobjekter, formodstande og dekademodstande
- Tektronix oscilloskop, TDS 2012
- PC med LabVIEW og GPIB-forbindelse til oscilloskop. OpenChoice Desktop kan benyttes til at hente et oscilloskop-billede over på PC'en (Screen Capture).

Baggrund og målsætning

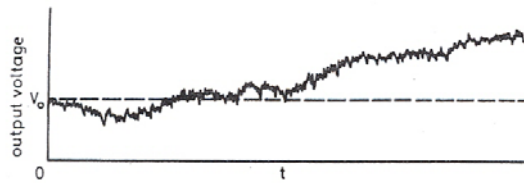
Når eksperimentalfysikere måler på svage signaler, støder de ofte på det problem, at den søgte effekt drukner totalt i støj. Støjen kan være stokastisk eller skyldes interferens, fx elektriske signaler ved netfrekvensen. I filterøvelsen kigger vi på hvordan man kan forbedre signal-støj forholdet ved at skære irrelevante frekvenser væk. I denne øvelse skal vi se på en speciel teknik, hvor båndbredden kan begrænses vilkårligt om signalfrekvensen. Vi ser primært på den store klasse af eksperimenter, hvor man måler et systems reaktion på en påvirkning. Et eksempel er vist i Figur 1, hvor en laser stimulerer en prøve. Herved anslås en række tilstande i materialet, som efterfølgende vil relaxere til sin ligevægtstilstand. Dette sker for en del processer under lysudsendelse (fotoluminiscens). Noget af lyset kan opfanges med en linse og filtreres evt. optisk (hvis det skal være fint med en monokromator, der kun tillader et smalt bølgelængdeområde ad gangen at passere). Det lys, som kommer igennem bliver fokuseret på en fotodetektor, der omdanner energien til et elektrisk signal.



Figur 1 Opstilling til måling af fotoluminiscens (fra Ref. 1)

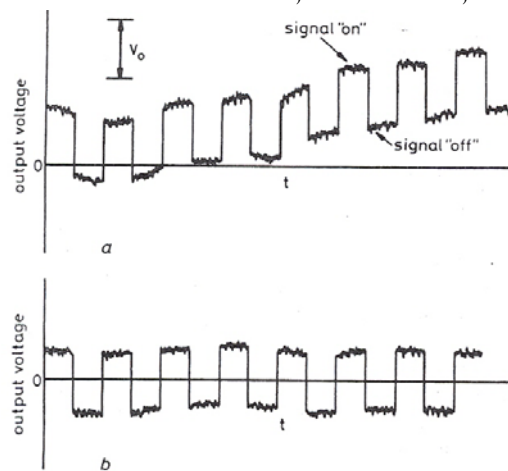
Som en første indskydelse ville man måske tænke på at udføre målingen som et rent DC-eksperiment. Så kan chopper-hjulet, der her tjener til at afbryde laserlyset periodisk, fjernes, og fotodetektoren forbindes direkte til en jævnspændingsforstærker, hvis udgang registreres som funktion af tiden (fx ved hjælp af LabVIEW). I en situation som den viste - og mange tilsvarende - vil man se et resultat som vist i Figur 2. Signalet, som ideelt skulle være konstant, viser både hurtige og langsomme fluktuationer. De langsomme kaldes ofte drift og skyldes dels $1/f$ -støj i system og elektronik dels måske variationer i det baggrundslys, som uundgåeligt slipper ind til fotodetektoren. Sidstnævnte repræsenterer en direkte målefejl. Man kan derfor ikke bare komme uden om problemet ved at tidsmidle, men får i stedet den idé at sætte hånden for laseren og observere ændringen i fotodetektorsignalet over en kort tid. Tænder og

slukker man således laserstrålen mange gange, måler den tilsvarende signalændring og midler, kan man få et godt mål for luminiscensen.



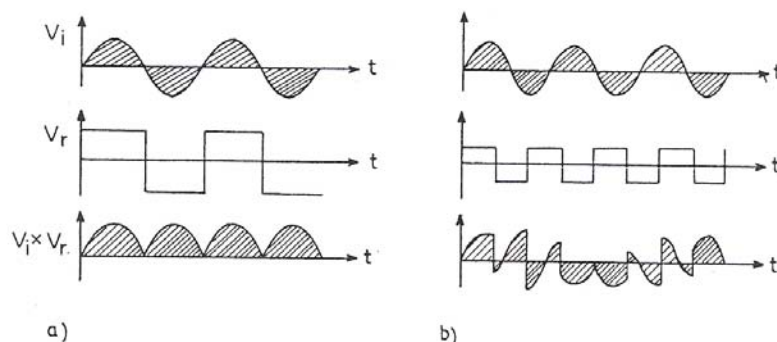
Figur 2 Typisk resultat af DC-måling vs tid. Driften umuliggør en meningsfuld måling. (Fra Ref. 2)

Det kan så systematiseres ved at bruge chopperhjulet, der afbryder og tænder laserstrålen periodisk. Nu er detektorsignalet som vist i Figur 3(a). Med et højpasfilter når vi til Figur 3(b). Et RMS-voltmeter kunne nu bruges til at danne en analog repræsentant for det ønskede signal, men afhængigt af voltmeterets egenskaber vil mere eller mindre af den højfrekvente støj blive målt med.



Figur 3 Effekt af at modulere påvirkningen. (a) Direkte signal fra fotodetektor. (b) Signal efter passage af højpasfilter (Fra Ref. 2)

I det konkrete tilfælde, såvel som i mange andre, er det lige til at frembringe et referencesignal, der er synkront med modulationen. I alle sådanne tilfælde er det en stor fordel at benytte en lock-in forstærker. Dens centrale del, den fasefølsomme detektor, énsretter almindeligvis simpelthen signalet synkront med referencesignalet. Man kan yderligere vælge en vilkårlig faseforskel mellem referencesignal og énsrettettakt. Ved at lavpasfiltrere udgangsspændingen fra den fasefølsomme detektor kan man bortfiltrere alle andre frekvenser end den relevante såvel som et signal ved den korrekte frekvens, men med den forkerte fase. Figur 4 illustrerer den almindeligt forekommende fasefølsomme detektors behandling af dels et synkront signal med optimal fase, dels et signal med en anden frekvens. Funktionen er ækvivalent med at multiplicere signalet med en firkantspænding ved referencefrekvensen. I første tilfælde fås en DC-komponent, som er et direkte mål for det ønskede signal. I sidste er DC-komponenten nul.



Figur 4 Den fasefølsomme detektors behandling af (a) et synkront, faseoptimalt signal og (b) et signal ved en anden frekvens

Det er øvelsens formål at gøre deltagerne fortrolige med brug af lock-in forstærkere specielt i forbindelse med undertrykkelse af støj. Efter øvelsen bør det være muligt for deltageren i en konkret måleopgave at vælge optimale indstillinger i hvert af de fire moduler, som sædvanligvis ud over den fasefølsomme detektor indgår i en lock-in forstærker. Undervejs stiftes praktisk bekendtskab med en række typiske anvendelser.

Teori for fasefølsom detektion

I en ideel fasefølsom detektor multipliceres signalet med et referencesignal, som er rent harmonisk, men som har en variabel fasekonstant. Hvis vi sætter referencesignalets RMS-værdi til 1 og ser bort fra støj har vi

$$v_{ref}(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_0 t + \phi) \text{ og } v_{sig}(t) = \sqrt{2} V_s \cos \omega_0 t \quad (1)$$

og dermed

$$v_{out}(t) = v_{ref}(t) \cdot v_{sig}(t) = V_s \cos \phi + V_s \cos(2\omega_0 t + \phi). \quad (2)$$

Bemærk, at der dannes sum- og differensfrekvenser. Med ϕ valgt til 0 og passende lavpasfiltrering, der fjerner sumfrekvenssignalet, fås altså en DC-spænding V_s på udgangen, som er lig RMS-værdien af det relevante signal.

Har man herudover en cosinusformet støjkomponent med RMS-værdi V_n , cyklisk frekvens ω_n og fasekonstant θ_n , fås yderligere et bidrag på udgangen, som bliver:

$$\delta v_{out}(t) = v_{ref}(t) \cdot v_{noise}(t) = V_n [\cos\{(\omega_n - \omega_0)t + \theta_n\} + \cos\{(\omega_n + \omega_0)t + \theta_n\}]. \quad (3)$$

Hvis støjkomponentens frekvens er tæt på signalfrekvensen, vil støjen vise sig i udgangssignalet som en AC-komponent med en RMS værdi på $V_n/\sqrt{2}$, eventuelt dæmpet af lavpasfilteret. Hvis der er hvid støj med spektraltæthed S_{V_n} omkring signalfrekvensen kan man bestemme den samlede RMS-støj, hvis man kender lavpasfilteret. Lad os forudsætte, at der er tale om et enkelt RC-filter (6 dB/oktav) med en tidskonstant T_0 . Det samlede RMS-bidrag bliver da bestemt ved (både frekvenser lige over og lige under bidrager):

$$V_n^2 = \int_0^{\infty} 2 \cdot \frac{S_{V_n}/2}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+(\omega T_0)^2} d\omega = S_{V_n} \frac{1}{4T_0}. \quad (4)$$

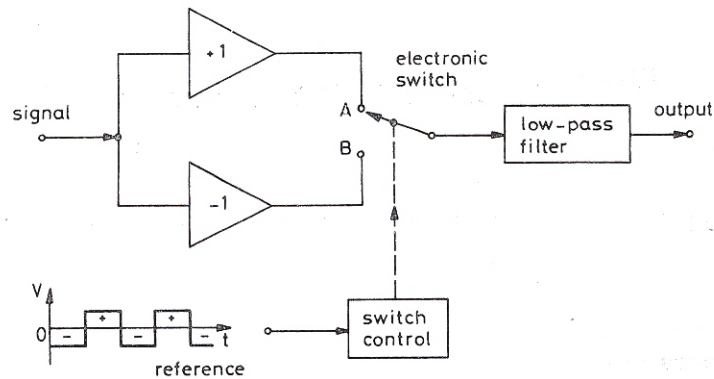
Den støj, som fremkommer på udgangen, er med andre ord bestemt af støjens spektraltæthed og en effektiv båndbredde på $(4T_0)^{-1}$. Ved blot at øge tidskonstanten, kan man altså reducere støjen vilkårligt meget. For et kritisk dæmpet 2. ordens lavpasfilter (12 dB/oktav, som også findes i de fleste lock-in forstærkere) er den effektive støjbandbredde $(8T_0)^{-1}$.

Opgave 1: Det relevante signal tændes til $t = 0$. Angiv udtrykt ved T_0 hvor lang tid der går, før udgangen af lavpasfilteret har nået 95% af sin slutværdi. Svaret ønskes både for 6 dB/oktav og 12 dB/oktav filtre (Hjælp: Trin-responset for kritisk dæmpning i 2. orden er $v(t) = v_0[1 - \exp(-t/T_0) - (t/T_0)\exp(-t/T_0)]$).

Det er vanskeligt at fremstille en ideel signalmultiplikator med et tilstrækkeligt stort frekvensområde og dynamisk område. Det er meget simplet at designe et skifte kredsløb, som vist i Figur 5, der fungerer efter princippet i Figur 4. Dvs. referencesignalet kan opfattes som en firkantspænding på ± 1 med variabel fase, der ganges på indgangssignalet. Det er da også den type detektor man oftest finder i kommercielle lock-in forstærkere.

I stedet for ligning (1) får vi nu, idet vi benytter Fourierrekkens for firkantspændingen:

$$v_{ref}(t) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 4}{\pi n} \cos(n\omega_0 t + n\phi) \text{ og } v_{sig}(t) = \sqrt{2}V_s \cos \omega_0 t. \quad (5)$$

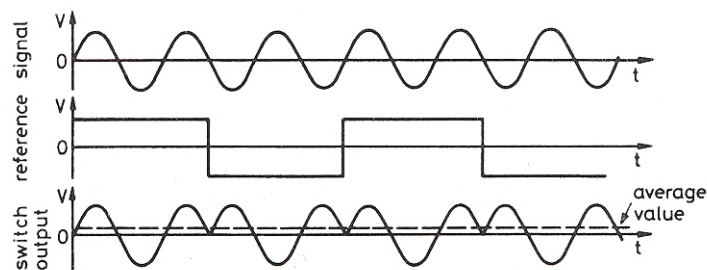


Figur 5 Princip for den almindeligste fasefølsomme detektor (fra Ref. 2)

Før lavpasfilteret bliver signalet:

$$v_{out}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_s \cos \phi + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_s \cos(2\omega_0 t + \phi) + \sum_{n=3,5,..}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n} V_s [\cos\{(n+1)\omega_0 t + n\phi\} + \cos\{(n-1)\omega_0 t + n\phi\}] \quad (6)$$

Igen kan lavpasfilteret sættes til at bortskære alle led bortset fra det første, så den eneste ændring tilsyneladende er en 10% mindre forfaktor på DC-niveauet. Man skal dog have for øje, at eventuelle synkroner signaler ved de ulige harmoniske af signalfrekvensen i en eller anden grad vil bidrage til DC-niveauet. Et eksempel er vist i Figur 6.

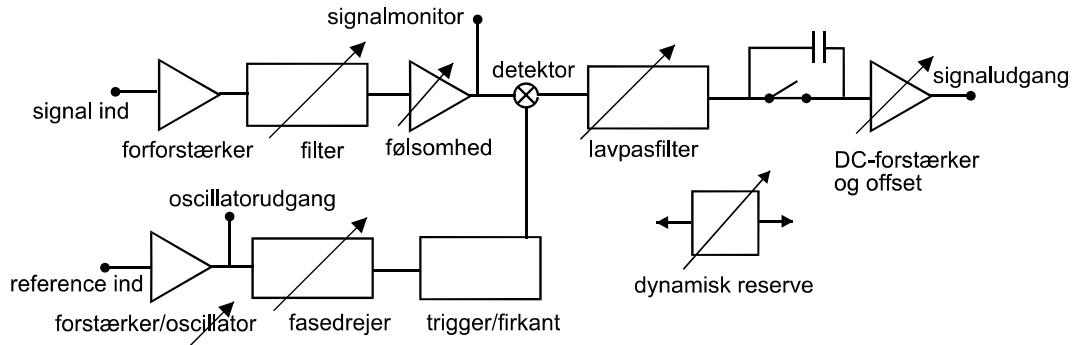


Figur 6 Synkron 3. harmonisk af referencesignalet kan bidrage til DC-niveauet (fra Ref. 2)

Alle støjkomponenter i smalle bånd om de ulige harmoniske vil også vise sig efter lavpasfilteret som lavfrekvent AC-støj. Det kan fx være stærkt generende, hvis man ved et uheld har en interfererende spænding liggende tæt på den tredje harmoniske. Det hvide støjbidrag øges også, men kun med omkring 20%, da det kun er de første par ulige harmoniske, som for alvor bidrager.

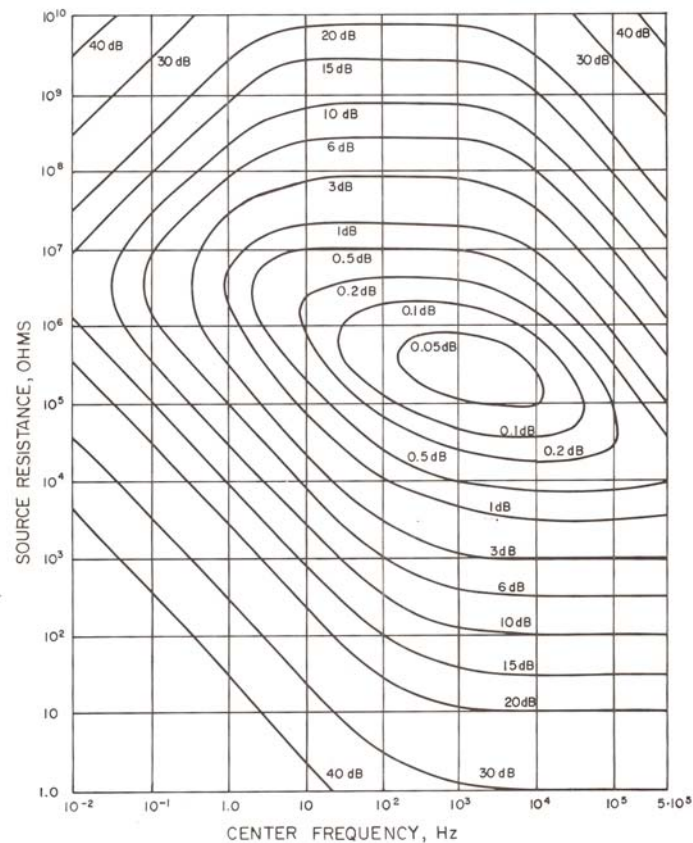
Lock-in forstærkerens signalvej

En lock-in forstærker udgør ofte en målestation med meget stor fleksibilitet. I det følgende beskrives kort signalvejene og de valgmuligheder man sædvanligvis stilles over for med udgangspunkt i EG&G5209. Figur 7 viser et blokdiagram af de vigtigste funktioner. For oplysninger om computerstyring og D/A konvertere henvises til manualen.



Figur 7 Blokdiagram af typisk lock-in forstærker

- Indkobling af signal. Spændingssignaler kan kobles til forforstærkeren single-ended (A) eller differentielt (A-B). I begge tilfælde kan effekten af eventuelle jordsløjfer reduceres ved at vælge flydende skærm (1 k Ω til instrumentstel). Herved begrænses strømmen i jordsløjfen og de deraf følgende uønskede spændingsfald. Er signalet effektivt en strømkilde, vælges B-indgangen i 10⁶ V/A eller 10⁸ V/A indstillingen. Forforstærkeren (100 M Ω indgangsresistans) er designet til at tilføje så lidt støj som muligt. De i Fig. 8 viste støjtal er repræsentative for denne type forstærker. Hvis man måler på en kilde med meget lav resistans, kan det støjmæssigt svare sig at sætte en signaltransformator mellem kilde og indgang.



Figur 8 Typiske støjtal for forforstærker

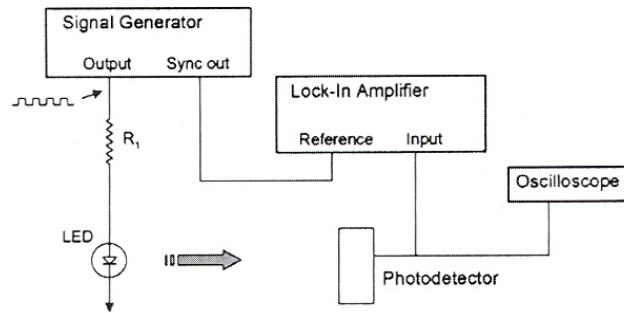
- Filtrering. Der er mulighed for at indsætte et 4. ordens $Q = 2$ båndpas-, lavpas- eller stop(notch-) filter (som følger referencefrekvensen eller vælges) og/eller stopfiltre ved enten 50 Hz, 100 Hz, eller begge i signalvejen. Man bør kun filtrere, hvis det er nødvendigt, fx for at undgå overload i

forstærkeren. Anvendelse af filtre vil altid give lidt fasedrejning og øget risiko for drift i fasen. Brug derfor normalt det flade filter (= ingen filtrering).

- Følsomhed. Denne sættes på trykknapperne. Vælger man fx 100 μV , vil et signal med 100 μV RMS og optimal fase netop give fuldt udslag på udgangen (DC expand afbrudt). Efter første forstærkertrin og filtrering er der adgang til signalet (signal monitor udgang). Ved opsætning af en måling bør man altid have et oscilloskop koblet op med referencesignalet til den ene kanal (som også bruges som trigger) og signal monitor til den anden kanal. Så er det let at identificere eventuelle problemer og vælge en passende filtrering. Signalet er nu beredt til detektion.
- Referencesektion. Der vælges enten ekstern eller intern funktion. I ekstern skabes signalmodulationen af en ydre kilde og et spændingssignal (mellem 0,1 og 5 V RMS) skal fødes til AC indgangen (alternativt kan et TTL-signal kobles til TTL-indgangen). I tuningspanel/display kan man aflæse referencefrekvensen og man kan sætte/aflæse filterets karakteristiske frekvens samt hvor meget referencesignalet bliver fasedrejet. Manuelt søger man den faseindstilling, hvor lock-in forstærkerens udgangssignal er 0 og ændrer derefter fasen med plus eller minus 90° så maksimalt muligt udslag fremkommer. I intern funktion benyttes en indbygget oscillator, der kan benyttes til signalmodulation. Oscillatorens udgang kan i tuningspanelet sættes til den ønskede frekvens og den ønskede RMS-værdi (max. 1,5 V, 600 Ω udgang). Både i intern og ekstern funktion kan man vælge indstillingen $2f$, hvor lock-in forstærkeren detekterer ved den dobbelte frekvens af referencen. Den indstilling er nyttig, hvor signalmodulationen skyldes en spændingsstørrelse, men ikke dens fortegn.
- Udgangssektion. Her passerer det detekterede signal først og fremmest lavpasfilteret. Man vælger tidskonstant og "roll-off rate". Valget af tidskonstant afhænger af, hvor meget støjen skal reduceres i forhold til hvor hurtigt man ønsker, at DC-niveauet skal stabiliseres. Bruger man et dataopsamlingsystem kan det være en god idé at benytte en kort tidskonstant og lade computeren midle over mange gentagne målinger. Endelig er der mulighed for at benytte expand, der giver yderligere 10 ganges DC-forstærkning, samt flytte nulniveauet (offset). Udgangssignalet kan præsenteres på displayet som % af fuld skala eller i enheden angivet for følsomhed. Den analoge udgangsspænding er +/-10 V ved fuldt udslag. Man kan også vælge andre funktioner for udgangssignalet: Visning af det aktuelle offset, visning af udgangsspændingen divideret med en påtrykt referencespænding (på bagsiden – ratio funktion), logaritmen af samme forhold, samt endelig RMS-støjen omkring referencefrekvensen. Ved dette valg indsættes et højpasfilter efter lavpasfilteret. Tidskonstanten er 10 sekunder, så det kræver tålmodighed at udføre støjmålinger. Den effektive støjbåndbredde er bestemt af den valgbare tidskonstant og "roll-off rate" for lavpasfilteret (se manual, fx giver 10 ms og 12 dB/oktav en effektiv båndbredde på 10 Hz).
- Dynamisk reserve. En sidste indstillelig parameter er den dynamiske reserve. Herved forstås hvor mange gange større et signal man kan have på indgangen end den valgte følsomhed uden overload (dvs uden tab af linearitet). Da høj reserve fås på bekostning af udgangsstabilitet (der flyttes forstærkning fra AC-siden til DC-siden, og DC-forstærkere har drift) bør man vælge den laveste reserve, der ikke giver overload.

Øvelse 1 Et simpelt eksperiment til at illustrere lock-in forstærkerens slagkraft er vist i Figur 9. Sæt opstillingen op, men forbind signalgeneratorens udgang både til lysdioden (LED = light emitting diode) og til oscilloskopets ene kanal, mens den anden forbindes til signal monitor. Vælg fx en frekvens på 1 kHz. Eksperimentér med at dreje fotocellens åbning hen imod/væk fra sigtelinien til LED'en. Tag billeder af situationer, hvor der er moderat støj og hvor signalet uden filtrering drukner i støj. Vurdér størrelsen af det mindste detektérbare signal fra fotodetektoren (ved 1 s observationstid). Forsøg at

bestemme den dynamiske reserve for normal reserve indstilling. Undersøg virkningen af forskellig filtrering i signalsektionen.

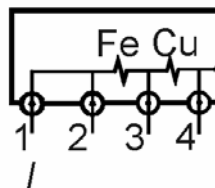


Figur 9 Opstilling med let variabelt signal/støj forhold (fra Ref. 1)

Opgave 2. Hvordan vil udgangsspændingen variere som funktion af faseindstillingen for en ufiltreret firkantspænding for (1) den ideelle fasefølsomme detektor og (2) den normale detektor (Figur 4).

Øvelse 2. Undersøg 5210's detektionsmetode ved at anvende resultatet i opgave 2.

Et eksempel på målesituation, hvor man altid vil ty til lock-in teknikken er bestemmelse af en lav resistans, hvor målestrømmen samtidig skal holdes på et lavt niveau for at undgå at opvarme eller beskadige prøven. I denne øvelse kan vi ikke bruge noget alt for skrøbeligt, så vi prøver at måle på et par metaltråde med resistanser af størrelsesordenen 10-30 m Ω . Figur 10 viser indholdet af prøveboksen.



Figur 10 Prøveboks med Fe- og Cu-tråde

Vi leger at det er nanoelektroniske prøver, der kun kan tåle strømme op til 100 μA . Dvs vi ønsker at måle spændinger på 1-3 μV . Forforstærkeren genererer selv en støj på omkring 5 nV i 1 Hz båndbredde, så det er til at leve med. I det følgende prøver I at måle de små resistanser på forskellig vis, så I kan få et førstehåndsindtryk af betydningen af valg af indkobling, frekvens mv. Vi bruger i alle tilfælde lock-in forstærkerens egen oscillator sammen med en 10 k Ω formodstand som strømkilde. Da oscillatorudgangen har en impedans på 600 Ω vil en spænding på 1,06 V give de maksimalt tilladte 100 μA .

Øvelse 3. Forbind med et coaxialkabel oscillatorudgangen med konnektor 1 gennem 10 k Ω .

Modstandsboxen placeres ved prøveboksen. De 100 μA løber nu igennem serieforbindelsen af Fe-tråd og Cu-tråd til stel og returnerer til oscillatorudgangen gennem coaxkablets skærm. Forbind konnektor 3 til indgang A på lock-in forstærkeren ved hjælp af et coaxkabel. Måling på A-indgang alene vælges. Mål ved en skikkelig frekvens omkring 1 kHz og lad først A-indgangens skærm være stellet (ground). Beskriv spændingen på monitor-udgangen og notér den målte spænding. Prøv at flytte på kablet fra 3 til A. Hvad sker der? Hvorfor er det håbløst at måle på denne måde? Sæt nu A-indgangen på float (dvs. til jord gennem 1 k Ω). Hvad fås nu? Kan man mon stole på resultatet?

Øvelse 4. For så godt som muligt at måle resistansen af Cu-tråden må det være bedst at måle spændingsfaldet fra 3 til 4. I øvelse 3 målte vi uundgåeligt forbindelsen fra Cu-trådens højre ende og til stel med. For mere realistiske prøver kunne der også være anselige kontaktmodstande. Med en sådan 4-punkts måling, hvor potentialproberne er nær strømfri, får man en sand måling på selve måleobjektet (her Cu-tråden). Da 4 derfor ikke ligger helt på stel, prøver vi nu at koble differentielt, dvs. 3 og 4 forbindes til A og B, og A-B vælges. Prøv både ground og float for skærmene. Diskuter resultatet. Flyt på indgangskablerne i forhold til hinanden. Hvad ser man? Læg målefrekvensen meget tæt på en lav harmonisk af netfrekvensen (prøv fx 100,8 Hz). Væg 300 ms i lavpasfilteret. Hvordan ser udgangssignalet ud? Hvad kan man gøre ved kablerne for at optimere målesituationen? Afprøv det – både ved den nu indstillede frekvens og omkring 1 kHz.

Øvelse 5. For yderligere at få en føling for pålideligheden af målingen tages nu en række målepunkter som funktion af frekvensen. Lock-in forstærkerens frekvensområde går fra 0,5 Hz til 120 kHz. Tag fx målinger ved 3, 10, 30, 100, 300, 1k, 3 k, 10 k, 30 k og 100 kHz, men læg altid frekvensen lidt skævt i forhold til multipla af 50 Hz. Der måles både med 0° mellem oscillator og målt signal og med 90° mellem dem. Diskuter resultatet.

Øvelse 6. Gentag øvelse 5 for jertråden og kommentér evt. forskelle.

Øvelse 7. For at være sikker på, at strømmen blot er bestemt som oscillatorspændingen divideret med $10,6 \text{ k}\Omega$ måles strømmen ved samme frekvenser som spændingsfaldet over 100Ω . Sæt først de 100Ω lige efter oscillatorudgangen, mens de $10 \text{ k}\Omega$ fortsat er placeret ved prøveboksen. Ved hjælp af et antal T-led forbindes de to ender af 100Ω resistoren til A og B. Mål spændingerne igen både med 0° og 90° faseforskel. Holder strømmen sig konstant? Hvad går galt? Flyt nu de 100Ω ned på den anden side af de $10 \text{ k}\Omega$ og gentag. Ændrer det væsentlig på fortolkningen af resultaterne i øvelse 5+6? Hvordan forklares disse? [se evt. appendix]

I sidste eksempel på den almindelige lock-in forstærkers anvendelse måles støj, dels fra en række kendte resistorer, dels fra et lavimpedant måleobjekt, som viser ekstra støj.

Øvelse 8. Sæt den variable resistor (1 k, 10 k, 100 k og 1 M Ω) direkte på A. Mål RMS-støjen i en 10 Hz båndbredde i nærheden af 1 kHz. Sammenlign resultatet med Nyquist-formlens forudsigtelse. Mål for 10 k Ω støj i spring på en faktor 3 ned til 10 Hz. Kommentér.

2-fase lock-in forstærkeren og anvendelser

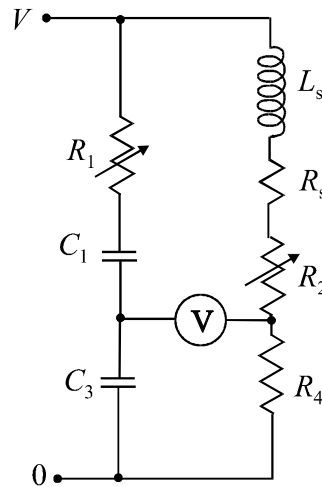
5210 lock-in forstærkeren er et eksempel på en 2-fase lock-in forstærker, der har to fasefølsomme detektorer, der altid detekterer ved to faser adskilt med 90° . De fleste lock-in forstærkere detekterer kun ved én fase. Ved målinger, som dem I gennemførte i øvelserne 5-7 kan den spare lidt tid, da man udfører to målinger ad gangen.

Mere generelt kan vi opfatte 2-fase lock-in forstærkeren som et vektorvoltmeter med samme fremragende støjundertrykkende egenskaber, som vi har diskuteret ovenfor. Dens to udgange kan vælges som X og Y svarende til 0° og 90° detektion. Det svarer til samtidig måling af en resistans og en reaktans og giver mulighed for et fasor-type plot. En beslægtet anvendelse er som nul-detektor i en vekselstrømsmålebro (se nedenstående øvelse).

Man kan også konfigurere udgangene til at give størrelse og fase af et signal. Her behøver man ikke eksakt synkronisme med referencesignalet. Ved at sweeppe referencefrekvensen langsomt, kan man danne et amplitudespektrum med høj opløsning - i.e. 2-fase lock-in forstærkeren kan også anvendes som en spektrumanalysator.

Opgave 3. Owen-broen til bestemmelse af en ukendt induktans.

Owen-broen vist i Figur 11 er et enkelt eksempel på en vekselstrøms-målebro.



Figur 11 Owen induktans-målebro

Udled balancebetingelserne for broen ved en påtrykt harmonisk spænding af cyklisk frekvens ω . L_s og R_s repræsenterer ækvivalentdiagrammet for den ukendte induktor. Hvilken betingelse skal referencekomponentværdierne opfylde, for at balance er mulig?

Øvelse 9 Owen-broen i praksis

Sæt en Owen-bro op i praksis og benyt den til at bestemme parametrene L_s og R_s for den foreliggende spole ved en frekvens omkring 1 kHz. Benyt funktionsgeneratoren til at forspænde broen og 2-kanal lock-in forstærkeren som 0-detektor (A - B kobling). Forsøg først at udbalancere direkte på grundlag af viseredslagene. Forbind dernæst lock-in forstærkerens udgange til X-Y afbildningen på oscilloskopet og gentag udbalanceringen. Bemærk fordelene ved den 2-dimensionale vektorafbildning.

Vælg en passende kapacitor til at få serie-resonans omkring samme frekvens og bestem L_s herudfra. Sammenlign. Hvordan checkes R_s -værdien?

Krav til journal: Besvarelse af opgaver. Beskrivelse og dokumentation for øvelser.

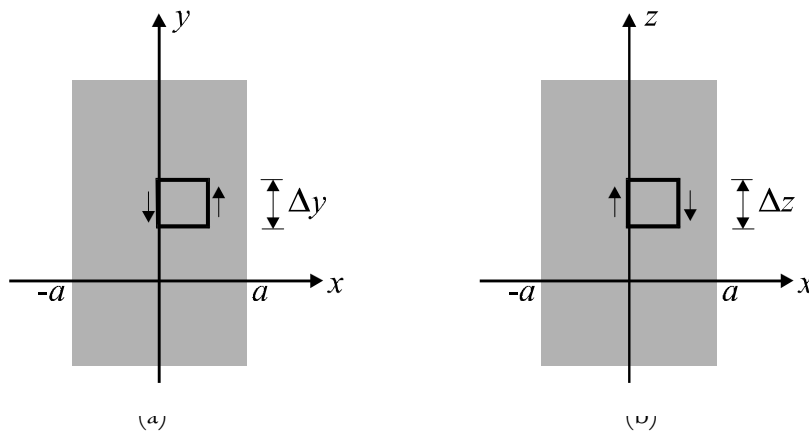
Litteratur:

- [1] K.G. Libbrecht, E.D. Black, and C.M. Hirata: *A basic lock-in amplifier experiment for the undergraduate laboratory*, Am. J. Phys. 71, 1208-1213 (2003).
- [2] M.L. Meade: *Lock-in Amplifiers: Principles and Applications*, IEE, Peter Peregrinus Ltd, London (1983).

Appendix: Strømfotrængning.

Betragtningerne omkring dæmpningen af bølger i ledende medier (Griffiths 9.4.1) hænger tæt sammen med fænomenet *strømfotrængning*. Lad os eksemplificere det ved at se på den elektriske strøm i en lang leder med cirkulært tværsnit. Ved lave frekvenser fordeler strømmen sig jævnt i tværsnittet. Øger man frekvensen vil man finde, at strømmen i stigende grad tvinges til at løbe ved overfladen. Hvis indtrængningsdybden, δ , (eng: 'skin depth') (se nedenfor) er meget mindre end radius af lederen, vil strømmen (der via Maxwell-ligningerne er tæt forbundet med felterne) også vise en eksponentiel aftagen ind i lederen. Dette er strømfotrængningen, som har stor teknisk betydning, da man som følge heraf ikke nødvendigvis udnytter hele ledningstværsnittet.

I denne simple udledning vil vi se på forholdene i en så idealiseret situation, at man kan regne på den. Hertil betragter vi en ledende plade med konduktivitet γ , permeabilitet μ og tykkelse $2a$ og udstrakt i de to andre retninger. Vi indlægger et koordinatsystem med origo i midten af pladen og x -aksen vinkelret på pladen, således at pladen begrænses af planerne $x = \pm a$. En strømkilde tvinger en strøm gennem pladen parallelt med z -aksen. Den samlede strøm er per længde i y -retningen $I \exp(-i\omega t)$ (vi bruger overalt komplekse repræsentanter). Af symmetri Grunde må strømtætheden være en lige funktion af x : $\mathbf{J} = J(x, t) \mathbf{e}_z$, hvor $J(x, t) = J(-x, t)$. Det elektriske felt er givet ved materialerelationen (Ohms lov): $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\gamma$. Da magnetfeltet cirkulerer om strømmene, må $\mathbf{H} = H(x, t) \mathbf{e}_y$, hvor H i øvrigt er ulige i x .



Figur A1. Cirkulationskurver for (a) \mathbf{H} og (b) \mathbf{E} . Strømrretningen er langs z

Vi antager, at frekvensen ikke er højere, end at $\gamma/\omega\epsilon \gg 1$, således at forskydningsstrømmen kan negligeres. Vi kan da bruge Ampères lov på kurven vist i Figur A1(a):

$$H(x, t)\Delta y - H(0, t)\Delta y = \int_0^x J(x', t)\Delta y dx' \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = J \quad (\text{A1})$$

Næste skridt er at formulere Faradays lov for kurven vist i Figur A1(b):

$$E(0, t)\Delta z - E(x, t)\Delta z = -\frac{d}{dt} \int_0^x B(x', t)\Delta z dx \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{A2})$$

Nu differentieres (A2) mht. x . Med $E = J/\gamma$, $B = \mu H$ og (A1) fås følgende ligning i J :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \gamma \mu \frac{\partial J}{\partial t} = -i\omega \gamma \mu J \quad (\text{A3})$$

Denne ligning har løsningerne:

$$J(x,t) = A \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \exp\left[i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)\right] + B \exp\left[\frac{x}{\delta}\right] \exp\left[i\left(-\frac{x}{\delta} - \omega t\right)\right], \quad (\text{A4})$$

hvor $\delta = [2/\gamma\omega\mu]^{1/2}$. Da J skal være lige, må $A = B$, og den fælles forfaktor kan bestemmes ud af den samlede strøm, der skal løbe (I).

Betragter vi fx \mathbf{E} -feltet, som er proportionalt med \mathbf{J} , kan vi se, at situationen inde i lederen kan beskrives som en superposition af 2 plane dæmpede bølger, hvoraf den ene kommer fra $x = -a$ og løber langs den positive x -akse, mens den anden kommer fra $x = a$ og løber modsat. Det fremgår også, at når $\delta \ll a$ vil strømmen koncentrere sig i overfladen i et lag, der effektivt har tykkelsen δ . Bemærk også, at der i et givet øjeblik kan være modsatrettede strømbidrag i et tværsnit.

Lad os vende tilbage til den almindelige situation. Når indtrængningsdybden er meget mindre end lederens tværdimensioner, er det let at regne på konsekvenserne af strømfortrængningen. Så vil strømmen løbe i et tyndt overfladelag og den effektive resistans er simpelthen givet ved et tværsnitsareal, der er lig lederens omkreds gange indtrængningsdybden.

Eksempel. Strømfortrængning i kobber. Frekvensafhængig resistans

For kobber ved stuetemperatur ($\gamma = 5,8 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) fås følgende bekvemme udtryk for indtrængningsdybden:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\omega\mu}} = \sqrt{\frac{2}{5,8 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \times 2\pi \times f \times 4\pi \times 10^{-7} \text{Vs/Am}}} = 66 \mu\text{m} \times \sqrt{\frac{\text{MHz}}{f}} \quad (\text{A5})$$

Her er f frekvensen. For en kobberledning med cirkulært tværsnit og diameter D , bliver resistansen per længde:

$$R_l = \frac{R}{l} \cong \frac{1}{\pi D \gamma \delta} = \frac{R_o}{l} \times \frac{D}{4\delta} \text{ for } D \gg \delta, \quad (\text{A6})$$

hvor R_o er DC-resistansen. Ved fuld strømfortrængning vokser resistansen altså med kvadratroden af frekvensen. Taleksempel: $D = 0,2$ mm. Grænsen til fuld strømfortrængning kan fx angives ved at $D = 10\delta$, i dette tilfælde svarende til $f > 10$ MHz. Vi finder videre:

$$R_l = \frac{R}{l} \cong \frac{R_o}{l} \times \frac{200}{4 \times 66} \times \sqrt{\frac{f}{\text{MHz}}} = 0,76 \times \sqrt{\frac{f}{\text{MHz}}} \times \frac{R_o}{l}. \quad (\text{A7})$$

Ved fx 100 MHz er resistansen altså 7-8 gange større end ved lave frekvenser, hvor strømmen fordeler sig jævnt i tværsnittet.

Strømfortrængning kan under visse omstændigheder være vigtig ved ret lave frekvenser. Der gælder selvfølgelig, hvis leder-dimensionerne er store, men også hvis materialet er magnetisk. Jernbaneskinne anvendes fx somme tider som transmissionslinier i forbindelse med sikringssystemer. Med et μ_r der kan sættes til 300-400, finder man allerede ved 50 Hz en indtrængningsdybde på kun 1,5-2 mm, dvs en almindelig skinne vil have fuld strømfortrængning.

Ved nøjagtige beregninger af transmissionslinieparametre spiller strømfortrængning ofte en væsentlig rolle. Det gælder ikke alene for beregninger af resistansen, som vi har set ovenfor, men også ved beregning af induktansen. Induktansen deles normalt op i en *ydre induktans*, L_y , og en *indre induktans*, L_i , således at den ydre bestemmes på grundlag af den magnetiske feltenergi *uden for* lederne, mens den indre associeres med feltenergien *i* ledermaterialet. Den ydre induktans vil være frekvensuafhængig, mens den indre på grund af strømfortrængningen aftager med voksende frekvens. Man kan vise, at der ved fuld strømfortrængning gælder at:

$$\omega L_i = R, \quad (\text{A8})$$

hvor R er den samlede resistans (summen af bidrag fra de indgående ledere). Indtrængningsdybdens frekvensafhængighed taget i betragtning betyder det, at L_i varierer som $1/\omega^{1/2}$ ved frekvenser, hvor der er fuld strømfortrængning.