

Temaøvelse: Elektriske filtre

Udstyr:

- Funktionsgenerator
- Alu-kasse med 4 forskellige 2. ordensfiltre
- Krohn-Hite 3750 filterbox
- Tektronix oscilloskop, TDS2012
- PC med LabVIEW og GPIB-forbindelse til oscilloskop. OpenChoice Desktop kan benyttes til at hente et oscilloskop-billede over på PC'en (Screen Capture). LabVIEW-programmer til simulering af støjfyldt signal, til generering af firkantpulser og til optagelse af Bode-plot.

Baggrund og målsætning

Eksperimentelt målte signaler vil i praksis indeholde støj. Med støj menes her alle uønskede signaler. Der kan være tale om støj med en diskret frekvens – fx 50 Hz brum stammende fra netforsyningen – eller bredbåndet støj – fx termisk hvid støj fra en indgangsforstærker.

Oftentimes vil en væsentlig del af informationsmængden i det relevante signal være båret af frekvenser inden for et begrænset frekvensområde, medens en væsentlig del af støjen ligger i et andet frekvensområde. I sådanne tilfælde vil signal/støj-forholdet kunne forbedres ved filtrering. Et andet formål med filtrering kan være at undgå, at ekstern støj når frem til et følsomt eksperiment. Det kunne være støj på forsyningsnettet eller radiofrekvenssignaler, der kan påvirke fx nanoskala elektroniske komponenter.

Et elektrisk filter er et kredsløb, der er designet til at have en bestemt signalbehandlende virkning mellem en indgang og en udgang. Filteret kan være passivt, dvs opbygget af resistorer, kapacitorer og induktorer, eller det kan være aktivt, opbygget omkring én eller flere tilbagekoblede forstærkere.

Formålet med denne øvelse er en analyse af virkningerne af forskellige filtertyper. Disse kan være ønskede: Undertrykkelse af støj ved frekvenser, hvor signalet ikke indeholder væsentlig information, eller uønskede: Forvrængning af signalets kurveform. Dimensionering af et filter til støjreduktion vil som regel være et kompromis mellem størst mulig støjreduktion og samtidig mindst mulig påvirkning af det ønskede signals kurveform. En beslægtet problemstilling findes ved de skillefiltre, som benyttes til at adskille forskellige kanaler i telekommunikation.

Der er fire hovedgrupper af filtre: a) Lavpasfiltre (tillader lave frekvenser at komme igennem), b) Højpasfiltre (tillader høje frekvenser at komme igennem), c) Båndpasfiltre (tillader et bestemt frekvensområde at komme igennem), og d) Båndstopfiltre (tillader alt uden for et givet frekvensområde at komme igennem); et båndstopfilter optimeret til en enkelt frekvens (ofte netfrekvensen) kaldes et notch-filter (engelsk: notch = hak).

Øvelse 1: Forbind via skrueterminalerne analog udgang 0 fra PC'ens datakort til kanal 1 på oscilloskopet. Kør *GenerateNoisySignal.vi*. Tag et screen shot og beskriv, hvad I ser. Benyt oscilloskopets FFT (Fast Fourier Transform) analysator til at give en beskrivelse af frekvensindholdet i signalet. Det ønskede signal er den svageste af de observerede faste frekvenser. Foreslå nogle filtertyper, der kunne forbedre signal-støjforholdet.

Generelt kan et lineært filter karakteriseres ved en overføringsfunktion af formen

$$H(s) = \frac{\text{udgangssignal}}{\text{indgangssignal}} = A \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots\dots\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots\dots\dots}, \quad (1)$$

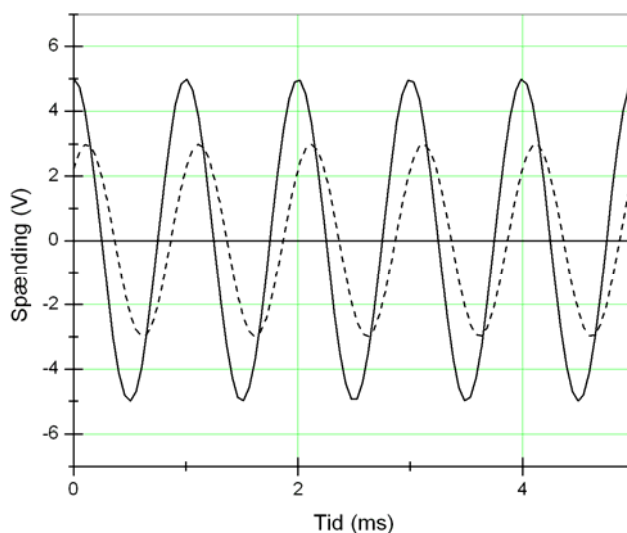
Jævnfør introduktionsdagen betegner s her en kompleks frekvens svarende til en tidsfaktor $\exp(st)$, for vekselspændinger blot $s = j\omega$. Størrelserne z_i og p_i er kredsløbets nulpunkter og poler. Et nulpunkt og en pol kan ikke falde sammen (så kunne man jo blot bortforkorte faktorerne). Hvis z_1 ligger på den positive imaginære akse, vil filteret helt undertrykke transmissionen ved $f = |z_1|/2\pi$. Det kan umiddelbart ses, at antallet af poler må være større end eller lig antallet af nulpunkter, da H ellers ville vokse ud over alle grænser, når frekvensen øges vilkårligt. Betydningen af polerne er intuitivt klar. De svarer til, at man kan have et endeligt udgangssignal, selv om indgangssignalet er nul og angiver derfor kredsløbets egensvingninger (også kaldet transienter eller naturlige svingninger). Antallet af poler definerer kredsløbets orden. Da nulpunkter og poler fremkommer som rødder i to polynomier med reelle koefficienter kan de kun forekomme som enten reelle tal (pol giver eksponentiel opførsel) eller som komplekst konjugerede par (polpar giver svingninger). For et stabilt kredsløb må alle poler ligge i venstre halvplan, da der ellers ville være eksponentielt voksende egensvingninger.

Af overføringsfunktionen udledes ved indsættelse af $s = j\omega = j(2\pi f)$ amplitude- og fasekarakteristikkerne, $A(f)$ og $\varphi(f)$, der karakteriserer filterets behandling af vekselspændinger, idet en spænding $V\cos(2\pi f t)$ på indgangen efter indsvingning giver $A(f)V\cos(2\pi f t + \varphi(f))$ på udgangen:

$$A(f) = |H(j2\pi f)| \quad \text{og} \quad \varphi(f) = \angle\{H(j2\pi f)\}. \quad (2)$$

Amplitude- og fasekarakteristikker afbildes hyppigt som Bode-plot for dæmpning og fase. Dvs. man plotter dæmpningen i dB, $x(f) = -20 \text{ dB} \log_{10} A(f)$, og fassen, $\varphi(f)$, mod en logaritmisk frekvensakse.

Eksperimentelt kan A og φ ved en given frekvens bestemmes ud fra et oscilloskopbillede af ind- og udgangsspændinger. Et eksempel er vist i Figur 1. Her er $A(1 \text{ kHz}) = 3/5 = 0,6$ ($x = 4,4 \text{ dB}$) og $\varphi = -42^\circ$.

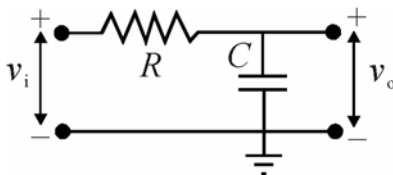


Figur 1 Eksempel på 1 kHz-signalbehandling. Indgangsspændingens amplitude (optrukken kurve) er 5,0 V. Udgangsspændingen (stiplet) har amplituden 3,0 V og er forsinket 0,12 ms svarende til $\varphi = -42$ grader

Opgave 1: Med udgangspunkt i ligning (1) ønskes angivet hvilke af de nævnte fire filtertyper, der kan realiseres som 1. ordens filtre. Nedskriv formen for hver mulig type. Gentag for 2. ordens filtre.

Passive første-ordens filtre

Det simplest filter består af et RC-led, som vist i Figur 2.



Figur 2: RC-led. Der påtrykkes en kendt spænding $v_i(t)$. Vi undersøger udgangsspændingen v_o (ingen strøm ud)

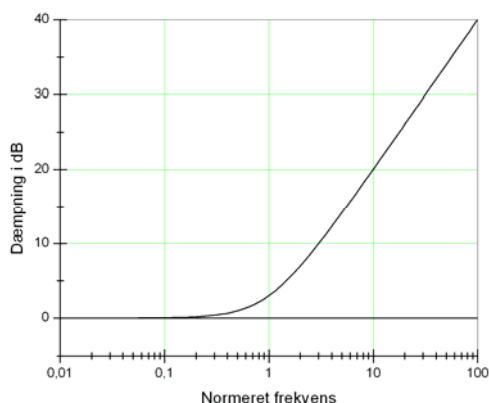
Kredsløbet er en spændingsdeler. I s -sprog fås:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s\tau} \quad (3)$$

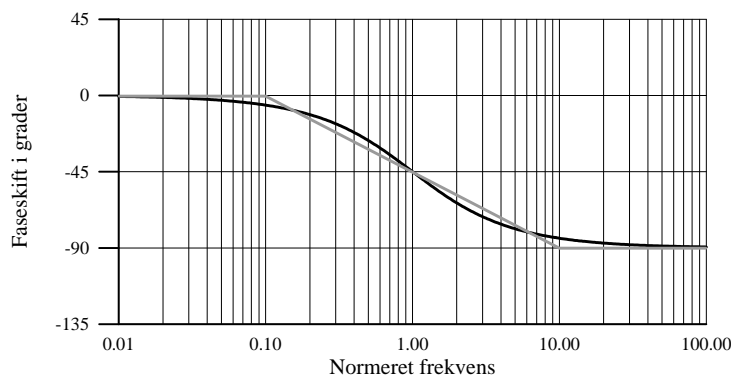
Her er kredsløbets tidskonstant $\tau = RC$ indført. Dæmpning og faseskift fås umiddelbart til:

$$x(f) = 10 \text{ dB} \log \left[1 + (2\pi f\tau)^2 \right] \text{ og } \varphi(f) = -\tan^{-1}(2\pi f\tau), \quad (4)$$

der er vist som Bode-plot i Figur 3.



Figur 3(a) Dæmpning for RC-leddet i Figur 2



Figur 3(b) Faseskift for RC-leddet i Figur 2

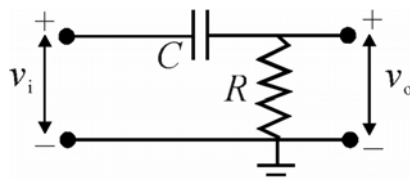
For dæmpningskarakteristikker af denne simple type finder man altid nogle fælles træk: Ved grænsefrekvensen er dæmpningen 3 dB. De asymptotiske forløb er vandrette eller har hældninger på multipla af 20 dB/dekade. Faseskiftet kan tilsvarende approksimeres med rette linier: De i alt 90°'s faseændring fordeles sig med ca. 45° over en frekvensdekade under grænsefrekvensen og 45° over en frekvensdekade over grænsefrekvensen. Man begår en fejl på maksimalt 6° ved at benytte den stykkevis lineære tilnærmelse.

Det viste eksempel er åbenbart et første ordens lavpasfilter med grænsefrekvens $f_c = 1/2\pi\tau = 1/2\pi RC$. Lave frekvenser slipper uforstyrret igennem. Høje frekvenser dæmpes med en "roll-off rate" på 20 dB/dekade.

Opgave 2: Et negativt faseskift svarer til en tidsforsinkelse på udgang i forhold til indgang. Tidsforsinkelsen betegnes også delay. Vis at RC-filteret har et frekvensuafhængigt delay, så længe frekvensen er langt under grænsefrekvensen.

Hvis et signal kun har væsentlige frekvenskomponenter i et område, hvor delay er omtrent konstant, vil kurveformen ikke forvrænges væsentligt ved passage gennem filteret.

Opgave 3: Skitsér Bode-plottene for CR-leddet vist i Figur 4. Beskriv kredsløbets filterfunktion.



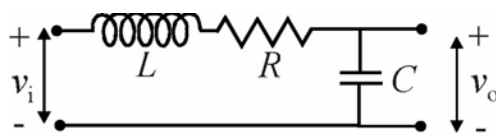
Figur 4 CR-spændingsdeler som filtersektion

Øvelse 2: Udmål ved hjælp af sinusgeneratoren dæmnings- og fasekarakteristikkerne for 1. ordens lavpas- og højpasfiltre i Krohn-Hite filterboxen. Vælg fx en grænsefrekvens på 200 Hz. Gå 2 dekader på hver side af grænsefrekvensen, fx i 1-2-5 trin. Ved udmålingen vælges den ønskede frekvens, og oscilloskopet justeres til man har et billede svarende til Figur 1. Så kan man enten aflæse amplituder og faseskift manuelt (brug evt. oscilloskopets faciliteter), eller benyt LabVIEW-programmet *TDS_filter.vi*, der ud fra oscilloskopbilledet bestemmer frekvens, amplituder, dæmpning og faseskift og afsætter de tilsvarende målepunkter i to Bode-plot. Sammenlign med teorien.

Benyt nu datakortet og *PulseGen.vi*, der er en primitiv lavfrekvens pulsgenerator, og undersøg de to filter-typers virkning på pulser, dels når pulsbredden er kort sammenlignet med filterets tidskonstant og dels når den er lang. Beskriv iagttagelserne og sæt dem i forbindelse med simple begreber såsom opladning af en kapacitor gennem en resistor.

Anden-ordens filtre

Man kan for at få en højere "roll-off rate" i sit lavpasfilter sætte 2 eller flere RC-led efter hinanden. Man kan imidlertid vise, at et passivt RC-netværk altid vil have sine poler på den negative reelle akse svarende til rene eksponentielt henfaldende transienter. Komplekst konjugerede polpar med en endelig imaginærværdi svarer til dæmpede svingninger, der ofte er påkrævede for at få en optimal filterkarakteristik. Vi vil i det følgende se nærmere på denne problematik for 2. ordens filtre. Det enkleste 2. ordens lavpasfilter, hvor man kan justere beliggenheden af poler/polpar vilkårligt er vist i Figur 5. Det er en RLC seriekreds, hvor spændingen tages ud over C.



Figur 5 LRC 2. ordens lavpasfilter

Overføringsfunktionen fås ved at betragte kredsløbet som en spændingsdeler:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}. \quad (5)$$

I sidste udtryk er kredsløbet blevet karakteriseret ved sine egenskaber som resonanskreds.

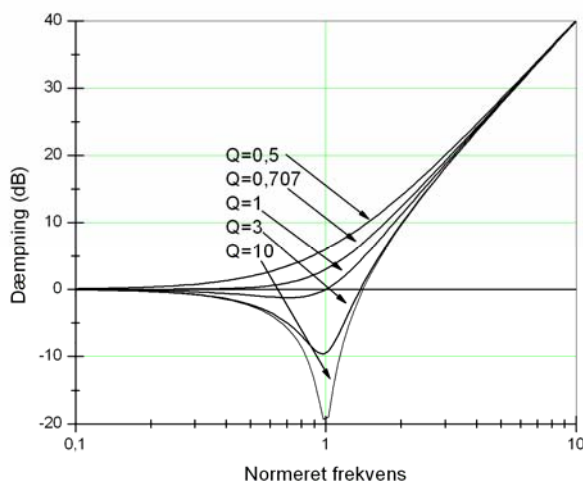
Resonansfrekvensen $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ og godhedsfaktoren (quality factor) $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Polerne findes til:

$$p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (6)$$

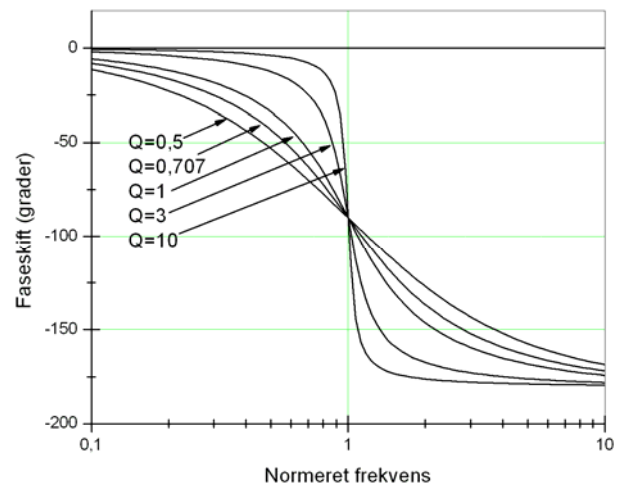
Vi ser, at $Q = 0,5$ giver kritisk dæmpning (hurtigst mulig indsvingning efter et spring i indgangsspændingen). For $Q > 0,5$ har man dæmpede svingninger.

Bodeplottene for overføringsfunktionen ligning (5) er vist i Figur 6 for forskellige Q -værdier.

Frekvenserne er normeret til ω_0 , som uafhængigt af Q er filterets grænsefrekvens. Som ventet transmitterer alle kredsløbene 100% vel under grænsefrekvensen, mens de alle har en "roll-off rate" på 40 dB/dekade vel over grænsefrekvensen. Q -faktoren er åbenbart en fri parameter, som kan vælges til at give ønskværdige filterkarakteristikker.



Figur 6(a) Dæmpningkarakteristikker for 2. ordens lavpasfiltre med Q som parameter



Figur 6(b) Fasekarakteristikker for 2. ordens lavpasfiltre med Q som parameter

Kurverne illustrerer problematikken. Går man efter at have en dæmpning nær 0 dB op til så nær grænsefrekvensen som muligt, skal man vælge $Q = 0,707 = 1/\sqrt{2}$ (maksimalt fladt eller Butterworth filter). Vil man have at filteret skal reagere på en pludselig spændingsændring med en kritisk dæmpning skal man vælge $Q = 0,5$ (lav- Q filter). Et tredje kriterium kunne være, at filterets delay skal holde sig konstant op til så høje frekvenser som muligt (giver $Q = 0,577 = 1/\sqrt{3}$: Bessel-filter). Man vil sjældent vælge et høj- Q filter, da det let lader transienter blive anslået. En mulig grund til alligevel at gøre det kunne være, at man vil minimere faseskiftet til så nær grænsefrekvensen som muligt.

Det passive filter i Figur 5 indeholder en induktor, der sammenlignet med resistoren og kapacitoren er dyr og afviger mere fra sin ideelle opførsel end de to andre komponenttyper. Det passive filter har dog den fordel, at det kun tilfører Nyquist-støj fra resistoren, samt at der ikke (bortset fra grænser sat af Joulevarme og kapacitorens maksimale arbejds-spænding) er bånd på det dynamiske område. I aktive filtre, der ofte består af en operationsforstærker med et passende tilbagekoblingsnetværk, kan man også variere beliggenheden af poler og nulpunkter frit og dermed designe et til formålet optimalt filter. Et sådant filter vil korrekt designet også have en høj indgangsresistans og en lav udgangsresistans. Man kan så kaskadekoble flere filtersektioner efter hinanden (fx et lavpasfilter og et højpasfilter, der tilsammen kan virke som et båndpasfilter; den samlede overføringsfunktion er med god tilnærmelse produktet af overføringsfunktionerne for hver sektion). Ulemper ved aktive filtre inkluderer: Nødvendighed af mere

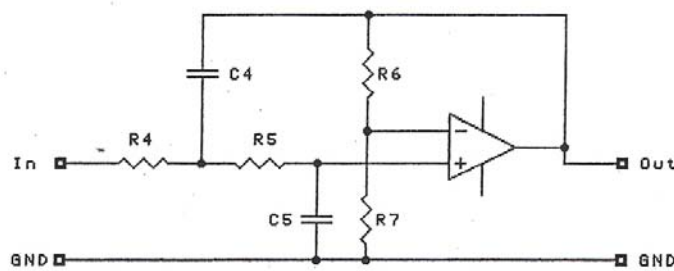
komplekse kredsløb og behov for DC-forsyninger, et dynamisk område begrænset af operationsforstærkerens forsyningsspænding, risiko for selvsving ved fejl, samt en uundgåelig tilførsel af støj fra forstærkeren.

Øvelse 3: Udmål dæmpnings- og fasekarakteristikkerne for 2. ordens Butterworth-lavpasfilteret i den lille alu-kasse. Gå mindst 1 dekade på hver side af grænsefrekvensen, fx i 1-2-5 trin og følg proceduren fra øvelse 2.

Øvelse 4: Foretag en mere detaljeret udmåling af dæmpning og faseskift op til to gange grænsefrekvensen for de tre lavpasfiltre i alukassen. Beregn og plot ud fra faseskiftene og frekvenserne den tilsvarende delay-karakteristik (lineær frekvensakse). Diskutér resultaterne i lyset af ovenstående teoretiske diskussion.

Øvelse 5: Skift til pulsgeneratoren på datakortet. Indstil til 1 volt pulser med varighed på 3 ms og repetitionsrate 100 Hz. Sammenlign og diskutér virkningen af de tre filtre.

Opgave 4: Diagrammet for de udmålte filtre er vist i Figur 7. Bemærk, at tilbagekoblingsnetværket fører til både plus og minusindgang. I de faktiske kredsløb er $R4 = R5 = R = 33,3 \text{ k}\Omega$, mens $C4 = C5 = C = 4,7 \text{ nF}$. $R6 = 6,49 \text{ k}\Omega$, mens $R7$ kan vælges til forskellige værdier (3-positions omskifter).



Figur 7 Skematisk diagram for aktivt 2. ordens lavpasfilter

- Vis, at kredsløbets DC-forstærkning $G = (R6+R7)/R7$.
- Vis, at overføringsfunktionen kan skrives:

$$H(s) = \frac{G}{(RC)^2 s^2 + (3-G)RCs + 1} \quad (7)$$

- Bestem G således at $A(f)$ kun indeholder frekvensen opløftet til 4. potens (Butterworth-filter). Hvad skal $R7$ så være? Passer G med målingen?
- Bestem G således at delay har samme værdi, når faseskiftet går mod nul og når faseskiftet går mod minus $\pi/2$ (Bessel-filter). Hvad skal $R7$ så være? Passer G med målingen?
- Bestem G således at filteret dæmper kritisk (lav- Q filter). Hvad skal $R7$ så være? Passer G med målingen?

Højere ordens filtre

Krohn-Hite filterboxen giver mulighed for at kaskadekoble to filtersektioner. De enkelte filtre kan vælges op til 4. orden.

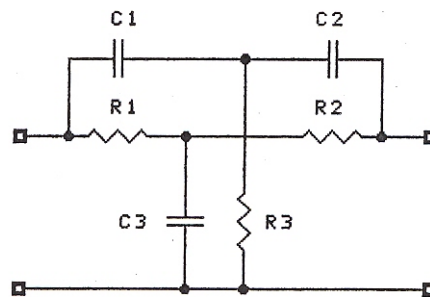
Øvelse 6: Opsæt et båndpasfilter (Butterworth) med grænsefrekvenser 1 og 3 kHz og maksimale ”roll-off rates”. Udmål dæmpnings- og fasekarakteristik. Passer resultater med forventningerne?

Øvelse 7: Observer ved hjælp af pulsgeneratoren pulssvaret for Butterworth lavpasfiltre af 1., 2., 3. og 4. orden. Beskriv de observerede forskelle. Er der en tendens i observeret delay?

Notch-filter

Et notch-filter undertrykker som nævnt en bestemt frekvens og en omegn heraf. Det benyttes ofte til at fjerne netfrekvensen (50 Hz), der har stor tilbøjelighed til at trænge sig på (fx hvis man ikke har fået brudt sine jordsløjfer – se kablingsøvelsen).

Man kan fremstille et passivt 2. ordens notch-filter ved hjælp af 3 resistorer og 3 kapacitorer. Kredsløbet, det såkaldte twin-tee filter, er vist i Figur 8.



Figur 8 Twin-tee notch filter

Opgave 5: Idet det oplyses, at $R1 = R2 = R$ og at $R3 = R/2$, mens $C1 = C2 = C$ og $C3 = 2C$, skal det eftervises, at overføringsfunktionen er givet ved:

$$H(s) = \frac{(RC)^2 s^2 + 1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 1} \quad (8)$$

Øvelse 8: Udmål dæmpnings- og fasekarakteristikker for notch-filteret i den lille alukasse. Indgangssignalet er stabiliseret med en operationsforstærker, men ellers er funktionen realiseret som i Figur 8. Sammenlign (kvalitativt) med forventningen i ligning (8). Er der en frekvens, hvor transmissionen er umålelig lille?

Filterkombinationer

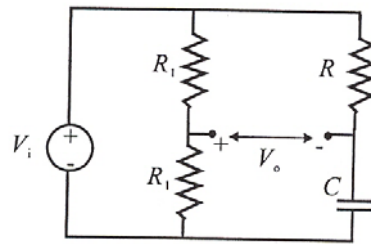
Som nævnt kan man uden videre kombinere aktive filterfunktioner uden at de i synderlig grad påvirker hinanden. Ved passive filtre må man ved hvert nyt design beregne hele overføringsfunktionen. Selv om filteret er delt op i sektioner er overføringsfunktionen ikke bare produktet af de enkelte sektioners overføringsfunktioner.

Øvelse 9: Benyt de foreliggende filterkasser til så godt som muligt at støjrense signalet fra *GenerateNoisySignal.vi*.

Sammenfattende betragtninger – hvad med digitale filtre ?

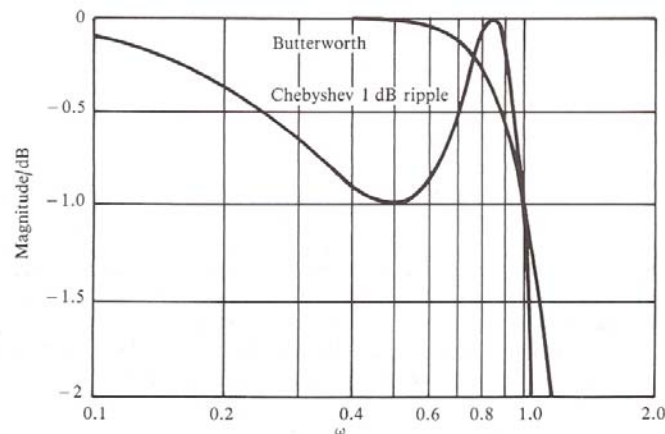
Formen af den generelle overføringsfunktion, ligning (1), viser klart at man ikke kan tilpasse dæmpningskarakteristik og fasekarakteristik uafhængigt af hinanden. Dybest set skyldes det kravet om kausalitet: Der kan ikke optræde en spænding på udgangen af et filter før der påtrykkes en spænding på indgangen (medmindre kredsløbet er ustabil). Det er fx umuligt at designe et lavpasfilter uden fasedrejning og dermed delay. Derimod kan man godt fremstille et fasedrejende kredsløb med frekvensuafhængig dæmpningskarakteristik.

Opgave 6: Bestem overføringsfunktionen for kredsløbet i Figur 9 og eftervis, at det har en rent fasedrejende funktion.



Figur 9 Eksempel på fasedrejende "all-pass" kredsløb

Vi så at man ved 2. ordens filtre kunne justere balancen mellem dæmpnings- og fasekarakteristik med en enkelt parameter, Q -værdien. For filtre af højere orden er der større fleksibilitet, og der findes klasser af filtre der hver optimerer særlige funktionaliteter. Fx kunne man være interesseret i en skarp afskæring ved grænsefrekvensen på bekostning af en vis tolerance på dæmpningen i pas-båndet. Figur 10 sammenligner et såkaldt Chebyshev 3. ordens filter med 1 dB tolerance med det tilsvarende Butterworth filter. Det ses klart, at hældningen ved grænsefrekvensen er skarpere for Chebyshev-filteret.



Figur 10 Sammenligning af amplitudekarakteristikker for Butterworth og Chebyshev 3. ordens lavpasfiltre (efter ref. [1]).

Eksperimentalfysikere har ofte behov for at redde svage signaler ud af dominerende støj. Her vil man næsten altid forsøge sig med en kombination af forstærkning og filtrering inden den videre måleproces, der fx kunne omfatte analog-til-digital konvertering i et PC-datatort. I tilfælde, hvor det målte tidsforløb foreligger, så det uden mærkbare kvantiseringfejle og frekvensbegrænsninger kan digitaliseres vil man nok gøre det. Det er stadig muligt at filtrere både i real time og efterfølgende. Det gøres så ved hjælp af digitale algoritmer, hvis udvalg langt hen af vejen svarer til de analoge filtre. Se fx LabVIEW-samlingen i Functions > Analyze > Signal Processing > Filters. Man kan også på tidligere indsamlede data udføre manipulationer, som den analoge verden ikke tillader. En grov filtrering kunne bestå i at

Fouriertransformere til frekvensdomænet, foretage en skarp frekvenstrunkering og dernæst transformere tilbage til tidsdomænet. En sådan operation er ikke-kausal, dvs man risikerer at effekten af en påvirkning viser sig i udgangssignalet før det tidspunkt, hvor påvirkningen faktisk blev tændt i eksperimentet.

Krav til journal: Besvarelse af opgaver. Beskrivelse af og dokumentation for øvelser.

Litteratur: [1] G.H. Tomlinson: Electrical networks and filters. Prentice Hall, 1991.

2006-04-19/CSJ