

FYSIK 2 - ØVELSER

LYSETS HASTIGHED OG

LRC-kredse

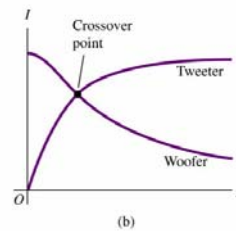
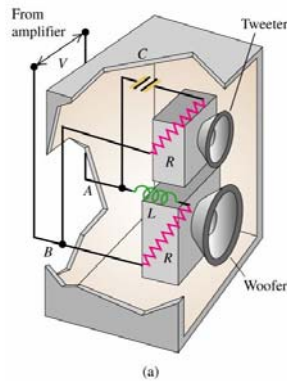
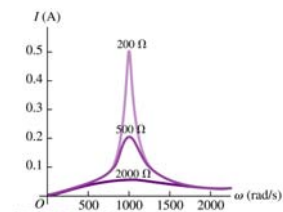
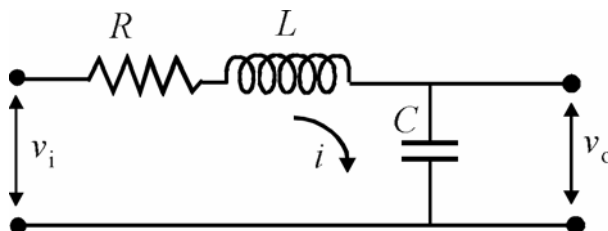
Placering:

Bygning 307, Rum 009, 015 og 028

Supplerende læsning:

University Physics, 12th (11th) ed.,

afsnit 24.1, 24.3, 26.4, 30.2, 30.4-6, 31.5, 32.2



Baggrund

I skal her stifte bekendtskab med elektriske svingningskredse. Det er kredsløbenes evne til selvsving (resonans), vi vil benytte til at bestemme lysets hastighed. I svingningskredse indgår tre forskellige elektriske komponenter, nemlig resistorer (modstande), kapacitorer (kondensatorer) og induktorer (spoler). Resistorer er strømstyrende og omdanner elektrisk energi til varmeenergi. Kapacitorer og induktorer er i modsætning hertil energiopbevarende, men opbevarer energi som henholdsvis elektrisk og magnetisk feltenergi. Når de er ideelle, er de fuldstændig reversible. Kapacitorer kan fremstilles, så de er tæt på at være tabsfri, mens induktorer i form af spoler altid vil have lidt resistans, som stjæler noget af energien. Spoler er også dyre og lidt klodsede at have siddende i et kredsløb, så de anvendes kun, når det ikke kan undgås.

Kredsløb indeholdende energiopbevarende komponenter har to tæt beslægtede sæt af egenskaber. Det ene sæt egenskaber vedrører kredsløbets mulige transienter (også kaldet egensvingninger eller naturlige svingninger). Transienter anslås typisk af en pludselig ændring, fx når man slutter en kontakt. Vi kender eksempler på transienter: Op- eller afladning af en kapacitor gennem en modstand (afsnit 26.4), op- eller afladning af en induktor (afsnit 30.2), eller dæmpede svingninger i en *RLC*-kreds (afsnit 30.6).

Det andet sæt egenskaber går på hvordan kredsløbet håndterer vekselstrøm (AC) ved forskellige frekvenser, dvs. sinus-signaler af forskellig frekvens. At der er en tæt sammenhæng mellem de to sæt af egenskaber illustreres af *LRC*-resonanskredsen (afsnit 31.5): Den reagerer voldsomt, netop når den drives ved en frekvens nær egensvingningsfrekvensen (resonans). Problematikken findes også i mange andre grene af fysikken (et pendul skal påvirkes i den rette takt, hvis det skal blive ved at svinge; regelmæssig hvirveldannelse omkring en hængesbro kan i uheldigste tilfælde få den til at kollapse (lærebogen, side 443, Tacoma Narrows Bridge, 1940)).

LRC-kredse kan bruges som højttalerfiltre. Et lavpasfilter lader lave frekvenser (dybe toner) passere til en bashøjttaler, mens et højpasfilter lader høje frekvenser (lyse toner) passere til en diskant-højttaler. Se forsiden.

3-delning af øvelsen

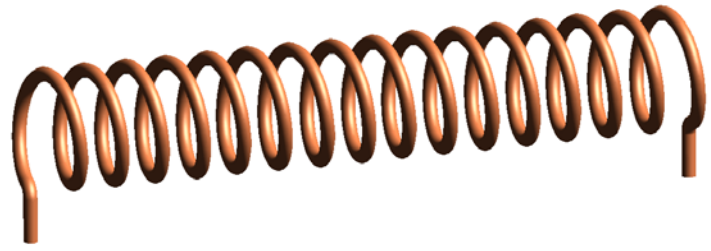
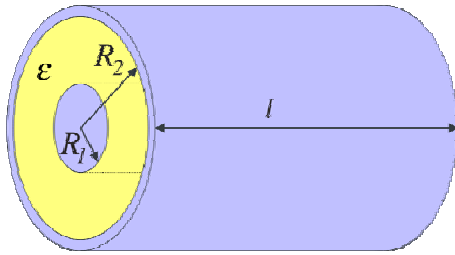
- A. Teori. Formler for L og C . (side 2 , her!)
- B. Eksperiment 1. Svingningskreds. Bode-plot. (side 4)
- C. Eksperiment 2. Svingningskreds. Lysets hastighed. (side 8)

A. Teori

For en cylinderformet kapacitor C og en lang spole L , har vi henholdsvis

$$C = \epsilon_0 \frac{2\pi h}{\ln(R_2 / R_1)} \quad \text{og} \quad L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \quad (1a \text{ og } 1b)$$

Her er R_2 den ydre cylinders indre radius, R_1 er den indres ydre radius og h er cylindrenes længde, mens N er spolens vindingstal, A dens tværsnitsareal og l dens længde.



Figur 1a. Cylindrisk kapacitor. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cylindrical_Capacitor.svg

Figur 1b. Lang spole (solenoid). <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solenoid-1.png>

Opgave 1. Udledning af formel (1a). Givet ladning Q på den indre cylinder, permittivitet $\varepsilon = \varepsilon_0$ i mellemrummet samt dimensioner som angivet i figuren ($l = h$).

- Skitsér en passende lukket flade, så I kan finde feltstyrken E af det elektriske felt mellem de to cylindre i afstanden r fra centeraksen.
- Find et udtryk for spændingsforskellen V mellem de to cylindre.
- Benyt endelig definitionen af kapacitans til at udlede udtrykket (1a).
- Eksempel på målte dimensioner: $R_2 = 56,75$ mm, $R_1 = 54,00$ mm, $h = 1,00$ m. Beregn C .

Opgave 2. Udledning af formel (1b). Givet strømstyrke I gennem N viklinger.

- Skitsér en passende lukket kurve, så I kan finde feltstyrken B af magnetfeltet i midten af spolen.
- Find den magnetiske flux Φ_B gennem en vikling i spolen.
- Benyt endelig definitionen af selvinduktion til at udlede udtrykket (1b).
- Eksempel på målte dimensioner: $N = 200$, $l = 3,97$ cm, $a =$ sidelængde 2,74cm (kvadrat). Beregn L .

Opgave 3. Beregn den forventede resonansfrekvens for en kreds med L og C som i 1d og 2d.

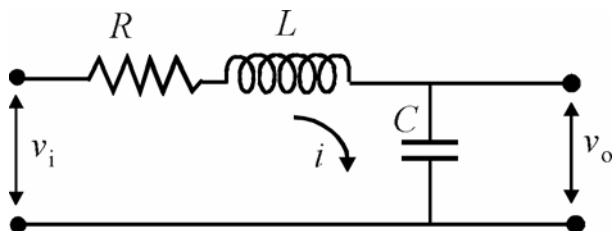
Opgave 4. Fra resonans til lyshastighed. Pointen er, at lyshastigheden c hænger sammen med *vakuumperrmittiviteten* ε_0 og *vakuumperrmeabiliteten* μ_0 . Kapacitoren giver os adgang til ε_0 , mens spolen giver os adgang til μ_0 ifølge (1a) og (1b). Samtidig indgår produktet af kapacitans og induktans i udtrykket kredsens *resonansvinkelfrekvens* ω_0 . Ved at måle *resonansfrekvensen* f_0 eller *perioden* T_0 og måle komponenternes geometriske dimensioner bliver det dermed muligt at bestemme c . Vis at man får

$$c = \frac{2\pi N}{T_0} \sqrt{\frac{2\pi h A}{l \cdot \ln(R_2 / R_1)}} \quad \text{eller} \quad c = 2\pi N f_0 \sqrt{\frac{2\pi h A}{l \cdot \ln(R_2 / R_1)}} \quad (2a \text{ og } 2b)$$

B. Eksperiment 1. Svingningskreds. Bode-plot

LRC-kredsens transienter og resonansopførsel

I skal undersøge et kredsløb som i Figur 2 bestående af en resistor, en induktor og en kapacitor.



Figur 2: LRC-kreds. Der påtrykkes en kendt spænding, v_i . Vi undersøger udgangsspændingen, v_o (ingen strøm ud)

Som angivet i afsnit 31.5 er kredsens resonansvinkelfrekvens givet ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (3)$$

mens vi fra afsnit 30.6 har vinkelfrekvensen for en underdæmpet svingning i en LRC-kreds givet ved

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (4)$$

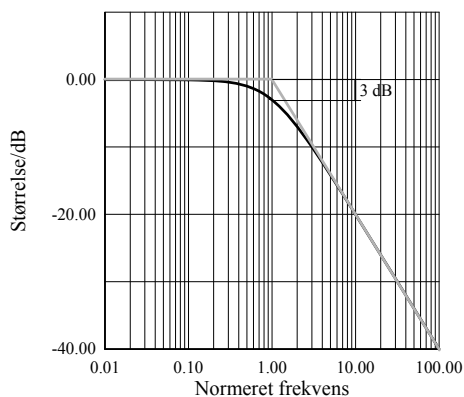
Bemærk, at for $R^2/4L \ll 1/C$ er $\omega' \approx \omega_0$.

Bode-plot for RC-led

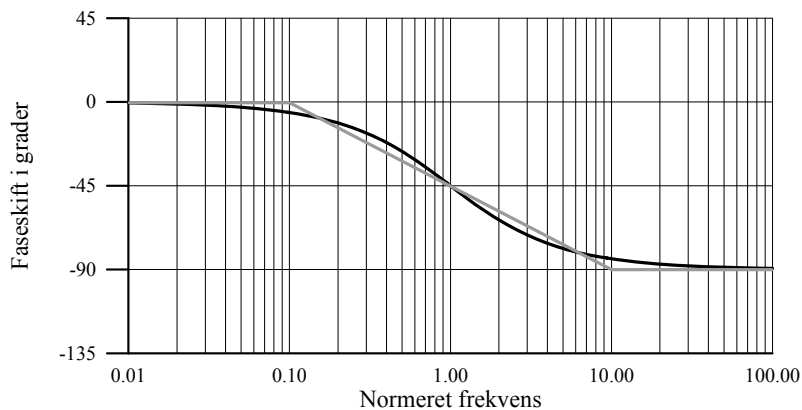
En indgangsspænding $v_i(t) = V_i \sin(\omega t)$ giver anledning til en udgangsspænding (o = out), som vi skriver på formen $v_o(t) = V_o \sin(\omega t - \phi)$, hvor $-\phi$ er det negative faseskift. For et RC-led ville man få følgende amplitudeforhold og faseskift

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(\frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{og} \quad \tan \phi = \omega RC. \quad (5)$$

Bemærk, at for ω lille (sammenlignet med τ^{-1}), er $V_o \cong V_i$ og faseskiftet er lille. Når ω er stor (sammenlignet med τ^{-1}) er $V_o \cong V_i / (\omega RC)$ og faseskiftet går imod -90° . Vi ser, at udgangssignalet falder ved høje frekvenser (lavpasfilter), som det også fremgår af Bode-plottet i figur 3a.



Figur 3a. Bode-plot af amplitudeforholdet ligning (5). En stykkevis lineær tilnærmelse er vist



Figur 3b. Bode-plot af faseskiftet, ligning (5). En stykkevis lineær tilnærmelse er vist

Informationen indeholdt i ligning (5) kaldes for *amplitude- og fasekarakteristikken* for RC -leddet. Man får et godt indtryk af opførslen ved at plote størrelserne på en logaritmisk frekvensakse. Endvidere plottes amplitudeforholdet også logaritmisk, mens faseskiftet plottes lineært. Traditionelt benyttes enheden decibel (dB) for amplitudeforholdets logaritme. Definitionen er følgende:

$$(V_o / V_i)_{dB} = 20 \text{ dB} \log_{10} \left[\frac{V_o}{V_i} \right]. \quad (6)$$

Bemærk at 20 dB svarer til en faktor 10 i amplitude.

Det viste eksempel er et første ordens lavpasfilter med *grænse(vinkel)frekvens* $\omega_c = 1/RC$. Lave frekvenser slipper uforstyrret igennem. Høje frekvenser dæmpes. Ved grænsevinkelfrekvensen er dæmpningen 3 dB. Dette kan også forstås ud fra impedansbegrebet. Kapacitans impedans $X_C = 1/(\omega C)$ falder med frekvensen, mens resistoren har konstant impedans, R . Derfor vil mindre og mindre af spændingen over RC -leddet lægge sig over C jo højere frekvensen er.

Bode-plot for LRC-led

I skal lave tilsvarende undersøgelser for LRC -kredsen. I dette tilfælde er den karakteristiske frekvens (*grænse(vinkel)frekvensen*) lig *resonans(vinkel)frekvensen* $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$. Udgangsspændingen nærmer sig indgangsspændingen ved frekvenser langt under grænsefrekvensen, mens den falder omvendt proportionalt med kvadratet på frekvensen ved høje frekvenser. Den samlede faseforsinkelse går fra 0 til 180° når man går fra lave til høje frekvenser. Ved grænsefrekvensen er

$$V_o = \left[\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right] V_i = Q V_i, \text{ og faseforsinkelsen er } 90^\circ. \text{ Den dimensionsløse størrelse, } Q, \text{ kaldes}$$

godhedsfaktoren eller *kvalitetsfaktoren* og karakteriserer kredsløbets detaljerede opførsel. I relation til filtre har vi at gøre med et lavpasfilter af 2. orden. Her ønsker man godhedsfaktoren afstemt, så ingen frekvenser særbehandles, men så der sker en større og større dæmpning af højere og højere frekvenser. I relation til radiomodtagelse benyttes også svingningskredse. Her ønsker man en høj godhedsfaktor, dvs. kraftig resonans idet radiosignalerne fanges ved at radiobølgerne inducerer et kraftigt signal i spolen omkring svingningskredsens egenfrekvens. I modtageren vælges radiostationens frekvens ved at tune L eller C .

Beskrivelse af øvelsesopstillingen

Udstyr: Multimeter, funktionsgenerator, dekaderesistor, dekadekapacitor, 2-kanaloscilloskop (TDS2012). Diverse ledninger og forbindelseskabler. Desuden PC med kommunikationssoftware til oscilloskopet, LabVIEW og Wordpad.

I skal selv forbinde kredsløbene. Sædvanligvis skal I observere to spændinger forskellige steder i et kredsløb. Vær opmærksom på, at skærmpunkterne på oscilloskopforbindelser og funktions-generator er på jordpotential (beskyttelsesjord). Disse skærmpunkter må derfor aldrig forbindes til punkter med andre potentialer i kredsløbene. Koaxialkabler har skærmen som den yderste leder.

I har to vigtige hjælpemidler til dokumentation af resultater: Benyt OpenChoice Desktop (vælg i *Select instrument*: GPIB0::01) til at hente oscilloskopskærbilledet (*Screen Capture*) over på PC'en via den opsatte GPIB (General Purpose Interface Bus)-forbindelse. Fra PC'en kan I kopiere billedet til udklipsholderen og videre til Wordpad.

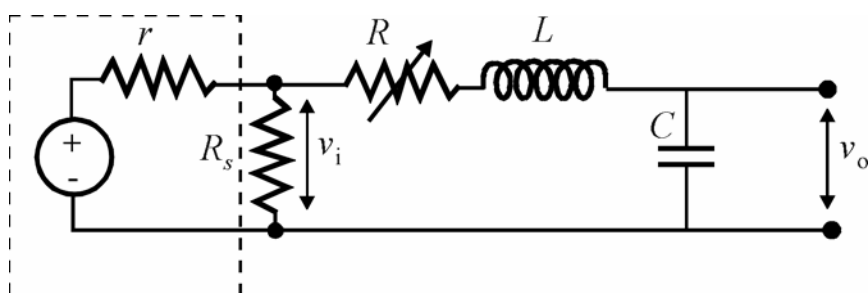
Benyt LabVIEW-programmet *TDS_transfer.vi* til at hente to spændingssignaler fra oscilloskopet og automatisk bestemme frekvens, spændingsforhold i dB og faseskift for en række manuelt indstillede frekvenser. LabVIEW-graferne kan ligeledes kopieres over i Wordpad. LabVIEW-programmet startes ved at aktivere den lille pil til venstre i værktøjslinien for oven. Følg i øvrigt instrukserne på programfladen. Når I stopper målingerne kan I gemme selve dataene i en tekstfil.

Øvelse 1

Forbind funktionsgeneratoren med kanal 1 på oscilloskopet og gør jer bekendt med generatorens og oscilloskopets funktioner. Oscilloskopet viser spændings- og tidsopløsningen nederst på skærmen (angivet per tern). Afprøv rutinen, der overfører oscilloskopbilledet til PC'en.

Øvelse 2

Afhængigt af komponentværdierne i figur 2, kan dette kredsløb udvise resonans, gå i selvsving! For tydeligere at kunne se virkningen ved variation af R , må vi imidlertid mindske generatorens indre modstand. Det gøres ved at indsætte en shunt (lille parallelmodstand) hen over generatorudgangen som vist i figur 4.



Figur 4. LRC-kreds. Som i Figur 2, men med shuntmodstand over generatoren

- Opsæt kredsløbet i Figur 4: Sæt først en shunt på 10Ω over generatorens udgang (benyt T-stykke). Opbyg seriekredsen med en ydre resistans $R = 100 \Omega$, en spole med en induktans $L = 0,01 \text{ H}$ eller $0,001 \text{ H}$ - og en kondensator med kapacitans $C = 0,3 \mu\text{F}$.
- Klargør opstillingen til måling, idet funktionsgeneratorens udgang forbindes både til v_i og til kanal 1 på oscilloskopet. Udgangsspændingen v_o iagttages på kanal 2.

- Beregn den forventede resonansfrekvens og benyt en firkantsspænding med passende frekvens som indgangssignal til kredsen, så transienter kan iagttages som udgangssignal over kapacitoren. Juster R for at opnå underdæmpning, kritisk dæmpning og overdæmpning. Dokumentér ved hjælp af OpenChoiceDesktop. Bemærk blandt andet svingningstiden ved underdæmpet svingning.

Øvelse 3

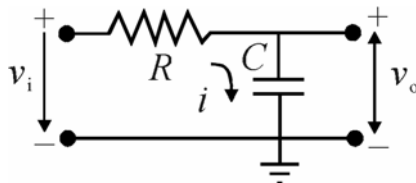
Her skal I undersøge resonansfænomenet. Benyt samme kredsløb som i øvelse 2, men nu med sinussignal og med $R = 0$.

- Prøv først at variere frekvensen over et meget bredt frekvensområde. Bemærk, hvordan amplitudeforhold og faseskift varierer.
- Benyt nu LabVIEW-programmet til at måle amplitudeforhold og faseskift systematisk igennem, så I får dannet jeres eget Bode-plot. Hvorfor bliver godhedsfaktoren ikke ∞ , selv om $R = 0$?
- I kan gemme resultatet som et skærmdump (screen shot).

C. Eksperiment 2. Svingningskreds. Lyshastighed

Transient opførsel for RC-kreds

Lad os som eksempel analysere et RC-led, som vist i Figur 5.



Figur 5: RC-led. Der påtrykkes en kendt spænding, v_i . Vi undersøger udgangsspændingen v_o (ingen strøm ud)

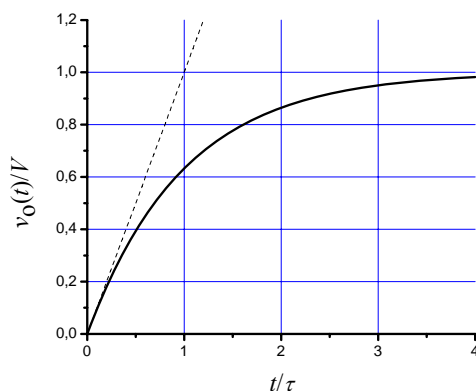
Hvis fx v_i springer fra 0 til en konstant værdi, V , til $t = 0$, vil vi for $t > 0$ få opbygget en ladning q i kapacitoren ifølge opladningskurven (afsnit 26.4)

$$q = CV(1 - e^{-t/RC}). \quad (7)$$

Til $t = 0+$ er der ingen spænding over C , men dernæst vil den vokse idet $v_o = q/C$, så vi får

$$v_o(t) = V \left(1 - \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \right), \quad t > 0. \quad (8)$$

Dette er det fra afsnit 26.4 kendte opladningsforløb, hvor tidskonstanten $\tau = RC$, se Figur 6. Det er et eksempel på et transient forløb.

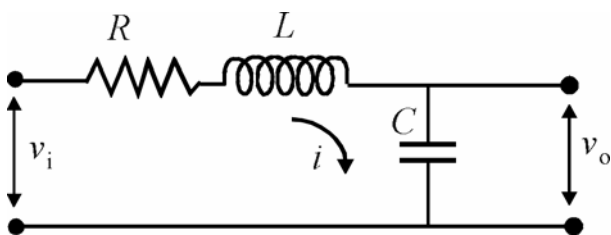


Figur 6: Eksponentielt tidsforløb for opladning af en kondensator

Hvis man lader indgangsspændingen springe periodisk mellem to værdier (firkantspænding) med en periode på nogle gange tidskonstanten, har man mulighed for at se op- og afladningsforløbene på fx et oscilloskop (der afbilder en eller flere spændinger som funktion af tiden). Når hele forløbet kan ses, er det muligt at bestemme τ eksperimentelt, enten som den tid hvor spændingen er $1/e = 37\%$ fra sin slutværdi, eller som den stiplede linie i figur 6 viser, ved at finde skæringspunktet mellem det vandrette slutniveau og kurvens starttangente.

LRC-kredsens transienter og resonansopførsel

Vi vender os nu mod det lidt mere indviklede kredsløb i Figur 7 bestående af en resistor, en induktor og en capacitor. Dette kredsløb har en vis *resonansopførsel*, hvor udgangsspændingen kan overstige indgangsspændingen for stationære signaler (f.eks. sinussignaler med fast frekvens på indgangen). Resonansen optræder, når sinussignalet frekvens passer med kredsens egenfrekvens. I det tilfælde vil der opbygges magnetisk og elektrisk energi i spolen og kondensatoren, og denne energi kan ”stå og skvulpe” frem og tilbage mellem de to komponenter, så udgangsspændingens amplitude kan overstige indgangsspændingens. Afhængigt af størrelsen af R , kan kredsløbet også udføre *underdæmpede*, *kritisk dæmpede* eller *overdæmpede svingninger* som transienter ved pludselige spændingsændringer (f.eks. firkantsignaler på indgangen). I skal iagttage begge dele.



Figur 7: LRC-kreds. Der påtrykkes en kendt spænding, v_i . Vi undersøger udgangsspændingen, v_o (ingen strøm ud)

Som angivet i afsnit 31.5 er kredsens resonansvinkelfrekvens givet ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (5)$$

mens vinkelfrekvensen for en underdæmpet svingning i en LRC-kreds givet ved

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (6)$$

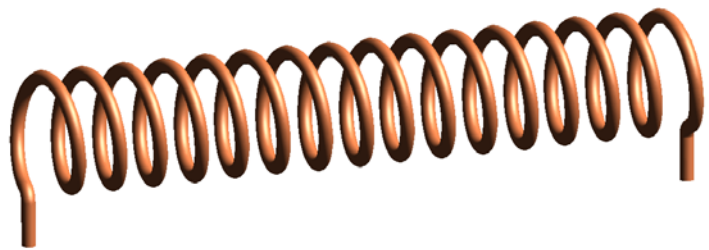
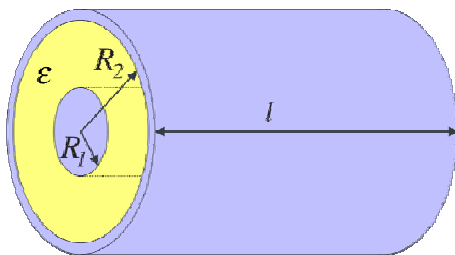
For $R^2/4L \ll 1/C$ er $\omega' \approx \omega_0$.

Komponentværdier for C og L ud fra geometriske dimensioner. Bestemmelse af lyshastighed c .

For en cylinderformet kapacitor C og en lang spole L , har vi henholdsvis

$$C = \varepsilon_0 \frac{2\pi h}{\ln(R_2 / R_1)} \quad \text{og} \quad L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \quad (1a \text{ og } 1b)$$

Her er R_2 den ydre cylinders indre radius, R_1 er den indres ydre radius og h er cylindrenes længde, mens N er spolens vindingstal, A dens tværsnitsareal og l dens længde.



Figur 1a. Cylindrisk kapacitor. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cylindrical_Capacitor.svg

Figur 1b. Lang spole (solenoid). <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solenoid-1.png>

Ved at måle *resonansfrekvensen* f_0 eller *perioden* T_0 for en LRC-kreds og måle komponenternes geometriske dimensioner bliver det dermed muligt at bestemme c . Man får

$$c = \frac{2\pi N}{T_0} \sqrt{\frac{2\pi h A}{l \cdot \ln(R_2 / R_1)}} \quad \text{eller} \quad c = 2\pi N f_0 \sqrt{\frac{2\pi h A}{l \cdot \ln(R_2 / R_1)}}. \quad (2a \text{ og } 2b)$$

Beskrivelse af øvelsesopstillingen

Udstyr: Funktionsgenerator, dekaderesistor, dekadekapacitor, spoler (200 vdg), 2-kanaloscilloskop (Pintek PS200). Diverse ledninger og forbindelseskabler.

I skal selv forbinde kredsløbene. Sædvanligvis skal I observere to spændinger forskellige steder i et kredsløb. Vær opmærksom på, at skærmpunkterne på oscilloskopforbindelser og funktions-generator er på jordpotential (beskyttelsesjord). Disse skærmpunkter må derfor aldrig forbindes til punkter med andre potentialer i kredsløbene.

Øvelse 4

Forbind funktionsgeneratoren med kanal 1 på oscilloskopet og gør jer bekendt med generatorens og oscilloskopets funktioner. Oscilloskopets spændings- og tidsopløsning kan justeres ved de store drejeknapper (angivet per tern). Vælg et sinussignal og afprøv drejeknapperne. Indstil funktionsgeneratoren på en given frekvens og kontroller perioden ved at aflæse på oscilloskopet. Tips: Mest præcist er det at aflæse fra aksekskæring til aksekskæring i stedet for fra top til top. Signalet kan forskydes hhv. lodret og vandret ved hjælp af drejelige positionsknapper.

Øvelse 5

Her samles de to stålcyindre til en kapacitor. Det indre rør omvikles i enderne med gaffertape, så det netop kan glide ind i det ydre. Diametre R_1 og R_2 måles med skydelære. Beregn den forventede kapacitans C . Opsæt kredsløbet i Figur 5 (RC -led), idet funktionsgeneratorens udgang med T-stykke forbindes både til v_i og til kanal 1 på oscilloskopet. Udgangsspændingen v_o iagttages på kanal 2.

Vælg fx en ydre resistans $R = 10,0 \text{ k}\Omega$. Beregn den forventede tidskonstant. Vælg endvidere en firkantspænding med passende frekvens (periode) for at se op-/afladningsforløbet. Bestem tidskonstanten og sammenlign med det forventede. Eksperimentér med at ændre R og se virkningen på udgangssignalet.

Øvelse 6

Benyt en ydre resistans $R = 100 \text{ }\Omega$, den blå spole med 200 vindinger samt den cylinderformede kapacitor. Mål spolens dimensioner og beregn den forventede selvinduktion L . Opbyg kredsen i figur 7. Beregn den forventede resonansfrekvens idet $\omega_0 = 2\pi f_0$ og benyt en firkantspænding med passende frekvens som indgangssignal til kredsen, så transienter kan iagttages som udgangssignal over kapacitoren. Juster R for at opnå underdæmpning, kritisk dæmpning og overdæmpning. Bemærk blandt andet svingningstiden ved underdæmpet svingning.

Øvelse 7

Benyt samme kredsløb som i øvelse 6, men nu med sinussignal. Her skal I undersøge resonans og derved bestemme lyshastigheden ifølge (2a) eller (2b).

Med sinussignal på funktionsgeneratoren varieres frekvensen. Hold øje med amplituderne på både indgangssignalet og på udgangssignalet over kapacitoren. Indstil frekvensen, så amplitudeforholdet v_o/v_i bliver maksimalt. Bemærk faseforskydningen. Aflæs perioden. Bestem lyshastigheden. Giv et skøn over usikkerheden. Hvis tiden tillader det, kan I prøve at sætte flere spoler i forlængelse af hinanden. Gør det resultatet bedre?